XII CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DO IFSP ITAPETININGA
Itapetininga, 19, 20 e 21 de maio de 2026
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Campus Itapetininga

ANÁLISE DINÂMICA DA ESTABILIDADE E SENSIBILIDADE PARAMÉTRICA APLICADA A UM MODELO DE LOTKA-VOLTERRA

Heloísa Helena dos Santos Neves – PIVICT/IFSP[1]
Prof. Dr. Leandro José Elias[2]

Introdução

A modelagem matemática de populações desempenha papel central na compreensão de fenômenos naturais que são descritos por meio de sistemas de equações diferenciais (Monteiro, 2006). Dentre os modelos clássicos, destaca-se o sistema presa-predador de Lotka-Volterra, que descreve uma interação interespecífica sob hipóteses biológicas simplificadas (De Roos, 2019), o que permite uma análise e, consequentemente, uma interpretação ecológica consistente. Embora amplamente estudado, o modelo permanece relevante atualmente como base para investigações mais complexas (Vadillo, 2019). Trabalhos mais recentes indicam a alta sensibilidade em relação à variação paramétrica especialmente quando considerados efeitos adicionais no modelo (He; Zheng; Ye, 2024).

Considerando o contexto abordado, o presente trabalho possui como objetivo analisar, introdutoriamente, um modelo de Lotka-Volterra, com foco na influência de parâmetros e de condições iniciais sobre a dinâmica populacional. Para isso, foram realizadas simulações numéricas com o uso do software MATLAB®, o que permitiu investigar o comportamento das soluções no plano de fases em torno do ponto de equilíbrio de interesse. As análises numéricas obtidas indicam que as soluções apresentam oscilações periódicas associadas à presença de órbitas fechadas no plano de fases em concordância com a teoria clássica de sistemas dinâmicos (Boyce; Diprima, 2015; Kelley; Petterson, 2010). Contudo, a sensibilidade às variações paramétricas do modelo resultou em alterações de natureza qualitativa nas soluções obtidas. Desse modo, o modelo reproduz o comportamento oscilatório esperado, mas evidencia limitações estruturais, o que conduz para a necessidade de extensões no modelo que permitam análises mais completas.

Objetivo

O presente estudo possui como principal objetivo analisar, de forma introdutória, o modelo de Lotka-Volterra, amplamente utilizado em estudos de descrições matemáticas sobre interações interespecíficas do tipo presa-predador. Para fins comparativos, este estudo visa compreender a influência dos parâmetros e das condições iniciais do modelo sobre a dinâmica populacional com ênfase em trajetórias em torno dos pontos de equilíbrio, a fim de uma melhor compreensão da estabilidade e das oscilações características do sistema.

[1]Estudante do curso de Licenciatura em Matemática, IFSP– Araraquara/SP. ORCID https://orcid.org/0009-0002-7832-1851, E-mail do primeiro autor: heloisa.neves@aluno.ifsp.edu.br.
[2]Doutor em Engenharia Elétrica Instituição IFSP – Araraquara/SP. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9598-8562. E-mail do autor: leandro.elias@ifsp.edu.br.

Metodologia

O sistema presa-predador constitui um dos modelos fundamentais na dinâmica de populações. O modelo clássico foi desenvolvido independentemente por A. J. Lotka e V. Volterra. Esse modelo descreve a interação entre duas populações sob hipóteses simplificadas que permitem análise matemática completa (De Roos, 2019). Sua formulação é dada por

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = rN - aNP, \\ \dfrac{dP}{dt} = \epsilon aNP - \mu P, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\mathrm{N(t)}$ é a densidade populacional de presas, $\mathrm{P(t)}$ é a densidade populacional de predadores, r é a taxa intrínseca de crescimento populacional de presas, a é a taxa de encontro interespecífico ou predação, ϵ é a eficiência da conversão metabólica da presa em biomassa do predador e μ é a taxa de mortalidade de predadores.

A partir dessa formulação, em consonância com as hipóteses biológicas, define-se como ponto de equilíbrio o indício de um estado de balanço dinâmico, no qual as taxas de crescimento populacional e de mortalidade são compensatórias (Boyce; Diprima, 2015). Considerando o sistema (1), os pontos de equilíbrio são obtidos nos valores em que as taxas de variação $\frac{dN}{dt} = 0$ e $\frac{dP}{dt} = 0$, ou seja,

$$\begin{cases} rN - aNP = 0, \\ \epsilon aNP - \mu P = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Resolvendo o sistema não linear (2), são obtidos dois pontos de equilíbrio, sendo eles a origem do sistema $P_{e*} = (0,0)$, que não é de interesse de estudo (pois não haveria população de presas e predadores), e o ponto $P_e = (N^*, P^*)$, onde $\mathrm{N}^* = \mu/\epsilon a$ e $\mathrm{P}^* = r/a$, obtido em função dos parâmetros do sistema.

Para a análise do sistema, é feita a linearização em série de Taylor, considerando os termos até primeira ordem, em torno do ponto de equilíbrio P_e. Para isto, defina as funções $f_1(N,P) = rN - aNP$ e $f_2(N,P) = \epsilon aNP - \mu P$. Calculando as derivadas parciais $\frac{\partial f_1}{\partial N}, \frac{\partial f_1}{\partial P}, \frac{\partial f_2}{\partial N}$ e $\frac{\partial f_2}{\partial P}$ é obtida a matriz Jacobiana

$$J(N,P) = \begin{pmatrix} r - aP & -aN \\ \epsilon aP & \epsilon aN - \mu \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J(N^*,P^*) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\mu}{\epsilon} \\ \epsilon r & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

sendo o último resultado já calculado no ponto de equilíbrio de interesse. Assim, os autovalores da matriz Jacobiana são $\lambda = \pm i\sqrt{r\mu}$, que têm parte real nula. Isso indica que o sistema não apresenta convergência assintótica para o equilíbrio, mas um comportamento oscilatório em torno do ponto de equilíbrio, classificado como centro neutro segundo Monteiro (2006).

Resultados

As simulações numéricas do modelo presa-predador foram realizadas com o uso do software MATLAB e a partir de diferentes valores de parâmetros e condições iniciais descritos na Tabela 1. Para a análise da influência dos parâmetros na dinâmica do sistema, as simulações foram classificadas em três grupos, sendo a simulação Padrão, Crítica e Ideal.

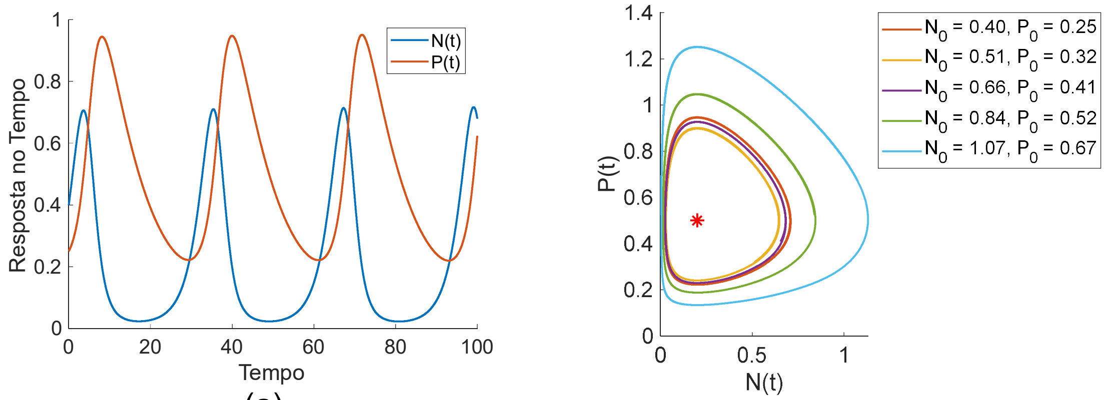
TABELA 1. Valores de parâmetros do sistema.

		Simulação Padrão	Simulação Crítica	Simulação Ideal
Condição Inicial	N_0	0,4	55	55
	P_0	0,25	15	15
Parâmetros do sistema	r	0,5	0,5	1,6
	a	1	1	0,08
	ϵ	0,5	0,5	0,008
	μ	0,1	0,1	0,032

Fonte: Autoria Própria.

Na simulação padrão, o ponto de equilíbrio é $P_e = (0{,}2\,,0{,}5)$. Verifica-se que a condição inicial N_0 e P_0 são tomadas próximas ao ponto de equilíbrio e, assim, a evolução temporal do sistema tem um comportamento oscilatório em torno do equilíbrio como mostra a Figura 1a. A Figura 1b apresenta a retrato de fases do sistema para diferentes condições iniciais, todas elas próximas ao ponto de equilíbrio, reforçando que a teoria é válida, desde que a solução permaneça relativamente próximo ao ponto de equilíbrio.

Figura 1 – Simulação padrão do sistema (2) mediante valores da Tabela 1: (a) resposta no tempo; (b) retrato de fases para diferentes valores de condição inicial.

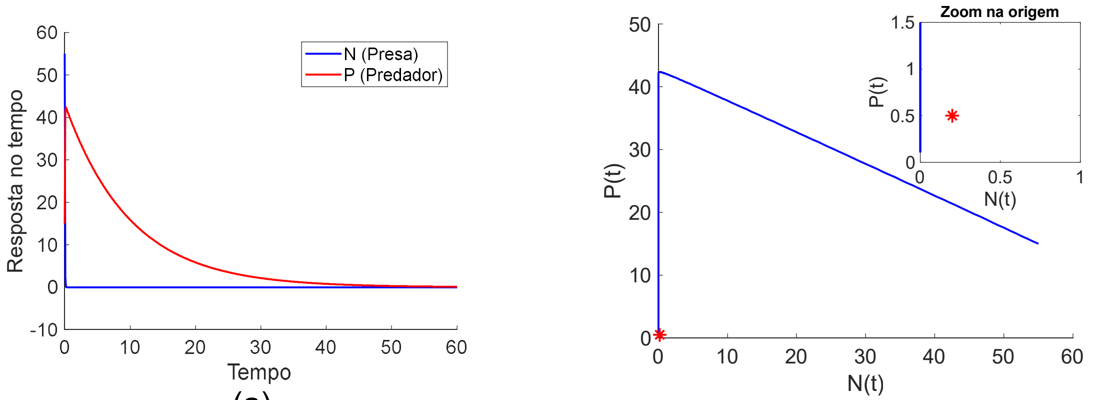


(a) (b)

Fonte: Autoria Própria.

A simulação crítica consiste em tomar uma condição inicial longe do ponto de equilíbrio $P_e = (0{,}2\,,0{,}5)$. A Figura 2a ilustra a resposta no tempo das variáveis de estado e a Figura 2b o retrato de fases. Verifica-se que a solução do sistema evolui para o outro ponto de equilíbrio P_{e*} que é a origem do sistema, onde $N(t)$, população de presas, avança rapidamente para a origem, e a população de predadores também evolui para a origem, mas com um decaimento mais lento.

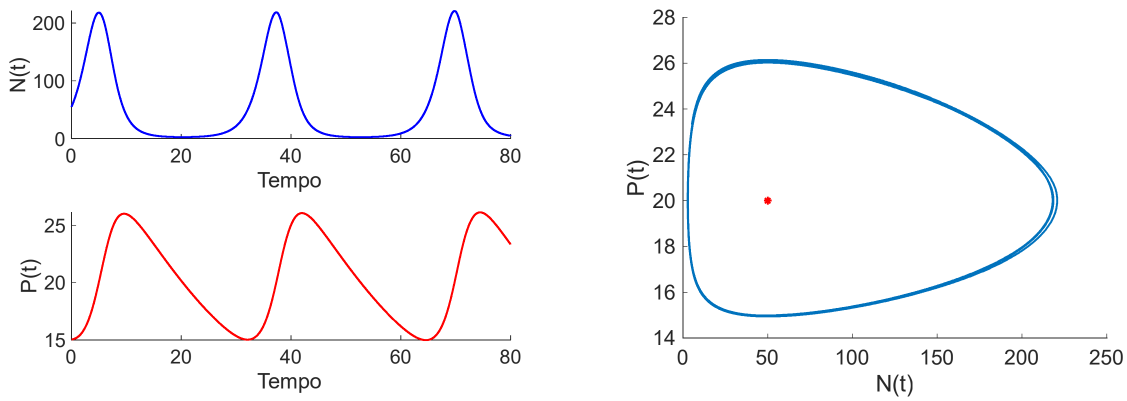
Figura 2 – Simulação crítica do sistema (2) mediante valores da Tabela 1: (a) resposta no tempo; (b) retrato de fases.



(a) (b)

Fonte: Autoria Própria.

Figura 3 – Simulação ideal do sistema (2) mediante valores da Tabela 1: (a) resposta no tempo; (b) retrato de fases.



(a) (b)

Fonte: Autoria Própria.

Desse modo, para se tomar uma condição inicial arbitrária é necessário definir de forma adequada os parâmetros do modelo. A simulação ideal consiste em definir previamente os parâmetros do modelo e, consequentemente, o ponto de equilíbrio também fica pré-definido. A Figura 3a ilustra a resposta no tempo das variáveis de estado e a Figura 3b o retrato de fases da simulação ideal. A condição inicial $\big(N(0), P(0)\big) = (55{,}15)$ ficou mantida em relação à simulação crítica, contudo o ajuste dos parâmetros do sistema determinou um novo ponto de equilíbrio $Pe = (50{,}20)$. Esse ajuste dos parâmetros permitiu que as trajetórias das soluções ficassem próximas ao ponto de equilíbrio, condição necessária para a equivalência topológica do sistema linearizado com o não linear. Assim, a solução numérica obtida ficou de acordo com a teria investigada, oscilando próxima ao ponto de equilíbrio de interesse.

Conclusão

Neste trabalho, foi realizada uma análise de um modelo de Lotka-Volterra mediante linearização do sistema não linear e análise do ponto de equilíbrio de interesse. As simulações numéricas são consistentes com a teoria investigada, confirmando a presença soluções oscilatórias e periódicas, também representadas por órbitas fechadas no plano de fases. Contudo, a análise realizada neste estudo mostrou que o modelo tem uma forte dependência entre a condição inicial e os parâmetros do sistema, mostrando que a escolha dos parâmetros pode afetar a topologia das soluções obtidas. Isto reforça o caráter não linear do modelo e sua limitação quanto à representação da realidade. Estudos futuros incluem a análise de diferentes modelos predador-presa da literatura e a investigação da teoria de bifurcações.

Referências

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

DE ROOS, A. M. **Modeling Population Dynamics**. Amsterdam: University of Amsterdam, 2019. Disponível em: https://staff.fnwi.uva.nl/a.m.deroos/downloads/pdf_readers/syllabus.pdf. Acesso em: 16 abr. 2026.

HE, J.; ZHENG, Z.; YE, Zhijian. A new numerical approach method to solve the Lotka–Volterra predator–prey models with discrete delays. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 635, p. 129524, 2024.

KELLEY, W. G.; PETERSON, A. C. **The theory of differential equations classical and qualitative.** 2. ed. New York, Springer, 2010.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos.** 2.ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

VADILLO, F. Comparing stochastic Lotka–Volterra predator-prey models. **Applied Mathematics and Computation**, v. 360, p. 181-189, 2019.