

XII CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DO IFSP ITAPETININGA

Itapetininga, 19, 20 e 21 de maio de 2026

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Câmpus Itapetininga

REPRESENTAÇÃO FUZZY TS DE UM SISTEMA MASSA-MOLA AMORTECIDO COM MOVIMENTO HORIZONTAL E NÃO LINEARIDADE NA FORÇA RESTAURADORA DA MOLA

João Antonio Cecci Salles – PIBIC/CNPq¹

Prof. Dr. Leandro José Elias - IFSP²

Introdução

O estudo de sistemas dinâmicos é fundamental para a compreensão e modelagem de fenômenos físicos presentes em diversas áreas da engenharia, especialmente em sistemas mecânicos descritos por equações diferenciais (Boyce; DiPrima, 2015; Ogata, 2010). Em geral, os sistemas físicos apresentam um comportamento não linear em seus modelos, tornando sua análise mais complexa (Monteiro, 2011).

A linearização clássica, baseada na expansão em série de Taylor em torno do(s) ponto(s) de equilíbrio, pode ser utilizada para uma análise local de estabilidade. Neste caso, a estabilidade pode ser investigada por meio da matriz Jacobiana e de seus autovalores (Kelley; Peterson, 2010; Monteiro; 2011). No entanto, essa abordagem apresenta limitações, pois a equivalência topológica do sistema não linear com o linearizado é garantida apenas próximo ao ponto de equilíbrio investigado.

Nesse contexto, destaca-se a modelagem fuzzy Takagi-Sugeno (TS), que permite representar sistemas não lineares, dentro de uma região de validade, por meio da combinação convexa de modelos lineares locais (Nogueira; Elias, 2023; Tanaka; Wang, 2004). A partir da modelagem fuzzy TS é possível investigar a estabilidade por meio ferramentas computacionais baseadas na função de Lyapunov e inequações matriciais lineares (Boyd et al., 1994), do inglês *Linear Matrix Inequalities* (LMIs).

Neste trabalho, é apresentada a representação fuzzy TS, utilizando o método de não linearidade por setores, de um sistema mecânico composto por dois blocos conectados por amortecedor e molas (Cevada; Elias, 2025). Uma não linearidade é inserida na força de restauradora da mola, tornando o modelo mais próximo do sistema físico. As simulações numéricas do sistema, realizadas em MATLAB®, mostram a equivalência do sistema não linear com o modelo fuzzy TS.

Objetivo

O objetivo deste trabalho é investigar a modelagem fuzzy TS na representação de sistemas dinâmicos não lineares, avaliando sua capacidade de representar o comportamento do sistema e comparando seus resultados com metodologias previamente utilizadas na literatura.

¹Estudante do curso de Bacharelado em Engenharia Mecânica, IFSP – Araraquara/SP. ORCID <https://orcid.org/0009-0003-1111-2497>, E-mail: j.cecci@aluno.ifsp.edu.br

²Doutor em Engenharia Elétrica. IFSP – Araraquara/SP. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9598-8562>, E-mail: leandro.elias@ifsp.edu.br

XII CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DO IFSP ITAPETININGA

Itapetininga, 19, 20 e 21 de maio de 2026

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

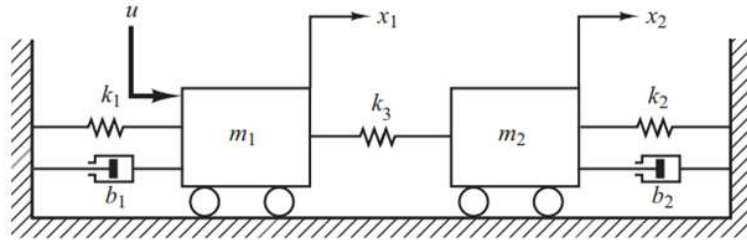
Câmpus Itapetininga

Metodologia

Seja o sistema físico da Figura 1 e as equações do modelo tal como apresentadas em Cevada e Elias (2025), onde os parâmetros das constantes elásticas da mola k_1 e k_2 são tomados como uma função das variáveis de estado do sistema. As equações de movimento do sistema são

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -k_1(1 + a^2 x_1^2)x_1 - b_1 x_1' - k_3(x_1 - x_2) + u, \\ m_2 x_2'' = -k_2(1 + a^2 x_2^2)x_2 - b_2 x_2' - k_3(x_2 - x_1). \end{cases} \quad (1)$$

FIGURA 1. Sistema com duas massas conectadas por amortecedores e molas.



Fonte: Ogata (2010).

Defina $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1'$, $y_3 = x_2$ e $y_4 = x_2'$. Assim, são obtidas as equações espaço de estado do sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -\frac{k_1}{m_1}(1 + a^2 y_1^2)y_1 - \frac{b_1}{m_1}y_2 - \frac{k_3}{m_1}(y_1 - y_3) + \frac{u}{m_1}, \\ y_3' = y_4, \\ y_4' = -\frac{k_2}{m_2}(1 + a^2 y_3^2)y_3 - \frac{b_2}{m_2}y_4 - \frac{k_3}{m_2}(y_3 - y_1). \end{cases} \quad (2)$$

Assim como em Tavares e Elias (2025) e Cevada e Elias (2025), u é uma função de deslocamento inicial definida por $u(t) = \rho$, se $t = 0$ e $u(t) = \rho^*$ se $t > 0$, ρ e ρ^* números reais. O sistema possui dois termos não lineares $z_1 = -\frac{k_1}{m_1}(1 + a^2 y_1^2)$ e $z_2 = -\frac{k_2}{m_2}(1 + a^2 y_3^2)$.

A representação Fuzzy TS é definida dentro de uma região limitada por $y_1(t) \in [-1, 1]$ e $y_3(t) \in [-1, 1]$. Defina as funções de pertinência $h_1 = M_1 N_1$, $h_2 = M_1 N_2$, $h_3 = M_2 N_1$ e $h_4 = M_2 N_2$, tal que

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{z_1(t) - \min(z_1)}{\max(z_1) - \min(z_1)}, & M_2 &= 1 - M_1, \\ N_1 &= \frac{z_2(t) - \min(z_2)}{\max(z_2) - \min(z_2)}, & N_2 &= 1 - N_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Os máximos e mínimos das não linearidades devem ser calculadas dentro das regiões de validade do sistema fuzzy TS definidas anteriormente. Verifica-se ainda que as funções de pertinência satisfazem as condições de convexidade

$$h_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, 4 \quad e \quad \sum_{i=1}^4 h_i = 1. \quad (4)$$

As matrizes dos sistemas locais são obtidas por

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \Phi_i - k_3/m_1 & -b_1/m_1 & k_3/m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_3/m_2 & 0 & \Upsilon_i - k_3/m_2 & -b_2/m_2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

onde

XII CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DO IFSP ITAPETININGA

Itapetininga, 19, 20 e 21 de maio de 2026

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Câmpus Itapetininga

$$\begin{cases} \Phi_i = \max(z_1), & \text{se } i \text{ é ímpar,} \\ \Phi_i = \min(z_1), & \text{se } i \text{ é par,} \end{cases} \quad \begin{cases} Y_i = \max(z_2), & \text{se } i \text{ é ímpar,} \\ Y_i = \min(z_2), & \text{se } i \text{ é par.} \end{cases} \quad (6)$$

Desse modo, o sistema não linear (2) pode ser representado na modelagem fuzzy TS por

$$y' = \sum_{i=1}^4 h_i A_i y. \quad (7)$$

A partir do modelo fuzzy TS, é possível investigar a estabilidade do ponto de equilíbrio, dentro da região de validade, utilizando a teoria de Lyapunov e LMIs (Boyd et al., 1994; Tanaka; Wang, 2004).

Resultados

Para análise e simulação do sistema, foram utilizados os valores dos parâmetros da Tabela 1. Assim como em Cevada e Elias (2025), foi tomado $\rho = 0.1$ e $\rho^*=0,05$ para a função de deslocamento inicial. Neste caso, o ponto de equilíbrio do sistema é $y^* = (0,0067 \ 0 \ 0,0033 \ 0)'$.

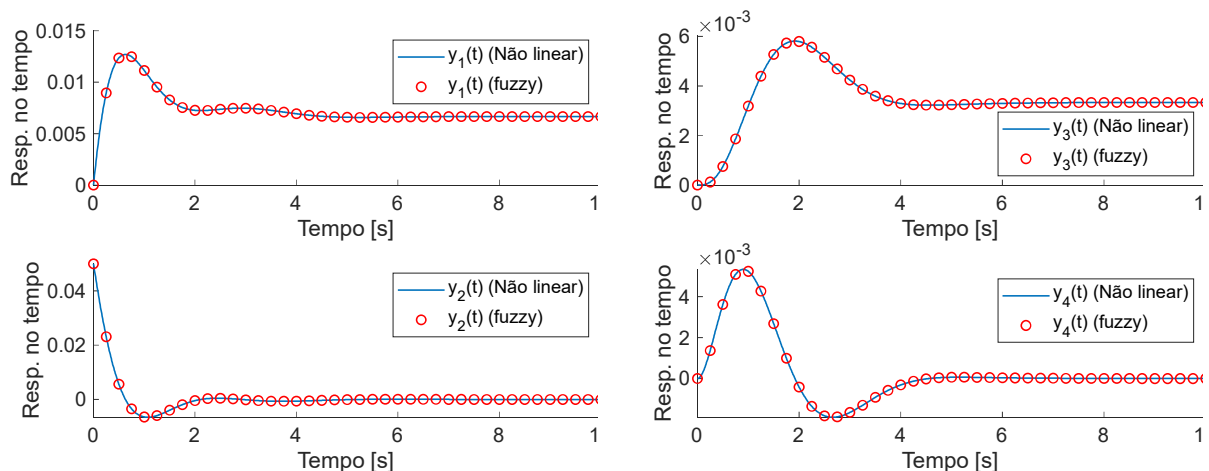
TABELA 1. Valores dos Parâmetros do sistema

Parâmetro	Valor
k_1	5 N/m
k_2	5 N/m
k_3	5 N/m
b_1	6 s^{-1}
b_2	6 s^{-1}
m_1	2kg
m_2	4kg

Fonte: Cevada e Elias (2025).

A simulação do sistema foi realizada com o software MATLAB e condição inicial $y_e = (0 \ 0,05 \ 0 \ 0)'$. A Figura 2 mostra a resposta no tempo das variáveis de estado do sistema não linear definido em (2) e do sistema fuzzy TS definido em (7), para valores de parâmetros da Tabela 1 e demais condições acima apresentadas.

FIGURA 2. Comparação da resposta no tempo dos sistemas não linear (2) e linearizado (5).



XII CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DO IFSP ITAPETININGA

Itapetininga, 19, 20 e 21 de maio de 2026

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Câmpus Itapetininga

Fonte: Autoria Própria.

Verifica-se pela Figura 2 que o sistema fuzzy TS é capaz de representar de forma exata, dentro da região de validade, o sistema não linear.

Conclusão

Neste trabalho foi realizado um estudo do método de não linearidades por setores do sistema fuzzy TS. Um sistema massa-mola horizontal, onde as constantes elásticas das molas fixadas lateralmente aos blocos foram tomadas como funções não lineares da posição, foi utilizado como objeto de estudo. Os resultados obtidos nas simulações mostraram que o sistema fuzzy TS foi capaz de descrever o sistema não linear, de forma exata, dentro da região de validade. Estudos futuros incluem a análise do sistema utilizando a representação do sistema não linear mediante uso de sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo, do inglês *Linear Parameter-Varying* (LPV).

Referências

- BOYD, S. et al. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Philadelphia: SIAM, 1994.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.
- CEVADA, A. S. M.; ELIAS, L. J. **Análise de um sistema massa-mola amortecido com não linearidade na força restauradora da mola**. Anais do EnICT, IFSP, 2025.
- KELLEY, W. G.; PETERSON, A. C. **The theory of differential equations classical and qualitative**. 2. ed. New York: Springer, 2010.
- MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos**. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.
- NOGUEIRA, G. H. S.; ELIAS, L. J. **Análise do modelo de um pêndulo invertido de base móvel utilizando representação fuzzy TS**. In: VIII Encontro de Iniciação Científica e Tecnológica (EnICT), IFSP, 2023.
- OGATA, K. Engenharia de controle moderno. 5. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010.
- TANAKA, K.; WANG, H. O. **Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach**. New York: John Wiley & Sons, 2004.
- TAVARES, G. S.; ELIAS, L. J. **Análise de um sistema massa-mola amortecido com não linearidade na força restauradora da mola**. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DO IFSP ITAPETININGA, 11., 2025, Itapetininga. **Resumos expandidos...** Itapetininga: IFSP, 2025. Disponível em: <https://eventosacademicos.itp.ifsp.edu.br/index.php/ic/article/view/104/46>. Acesso em: 20 abr. 2026.