

XI CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DO IFSP ITAPETININGA

Itapetininga, 27, 28 e 29 de maio de 2025

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Câmpus Itapetininga

ANÁLISE DE UM SISTEMA MASSA-MOLA AMORTECIDO COM NÃO LINEARIDADE NA FORÇA RESTAURADORA DA MOLA

Gabriel Seguro Tavares - PIBIC/CNPq¹

Prof. Dr. Leandro José Elias- IFSP²

Introdução

O presente trabalho apresenta resultados preliminares de um projeto de iniciação científica que propõe um estudo teórico-prático de sistemas dinâmicos. Com base nos estudos teóricos realizados, este trabalho apresenta uma análise de um sistema massa-mola amortecido, modelado por um sistema não linear. Sistemas do tipo massa-mola amortecido são muito explorados na literatura (MONTEIRO, 2006; BOYCE e DIPRIMA, 2010; GEROMEL e PALHARES, 2011; ZILL, 2016; KLUEVER, 2018), sendo utilizados para investigar oscilações de sistemas mecânicos e elétricos, além possuir uma diversidade de aplicações, como a suspensão de veículos.

No estudo realizado neste trabalho, foram consideradas algumas não linearidades nas equações para tornar o modelo matemático mais próximo de um sistema físico real. Para investigar o conjunto de equações não lineares obtido, foi utilizada a expansão em série de Taylor em torno do ponto de equilíbrio. A equivalência topológica do sistema não linear com o linearizado, próximo ao ponto de equilíbrio, permite investigar a estabilidade do sistema (CHEN, 1999; KELLEY; PETERSON, 2010).

Este trabalho está organizado com a apresentação da introdução e do objetivo. Na seção de metodologia são apresentados o modelo, a definição e demais considerações do sistema a ser investigado. Em resultados, são apresentadas as simulações realizadas para o sistema e, na sequência, é apresentada uma breve conclusão.

Objetivo

O objetivo deste estudo é analisar a estabilidade do ponto de equilíbrio de um sistema massa-mola amortecido, constituído por um conjunto de equações diferenciais não lineares. A não linearidade foi inserida para a utilização da expansão em série de Taylor no sistema não linear e estudo do sistema linearizado via matriz Jacobiana.

Metodologia

Seja um sistema constituído por dois blocos de massas m_1 e m_2 conectadas por um amortecedor de constante b_1 . Além disso, as massas m_1 e m_2 são conectadas à base por molas de constantes elásticas k_1 e k_2 , respectivamente, como mostra a Figura 1.

¹Estudante do curso de Bacharelado em Engenharia Mecânica, IFSP – Araraquara/SP. ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2542-1553>, E-mail: g.seguro@aluno.ifsp.edu.br.

²Doutor em Engenharia Elétrica. IFS P– Araraquara/SP. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9598-8562>, E-mail: leandro.elias@ifsp.edu.br.

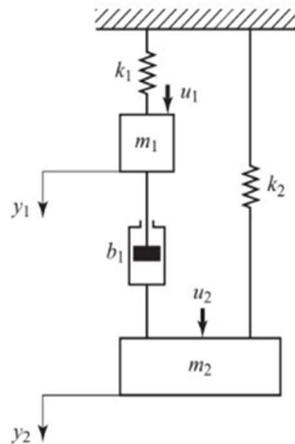
XI CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DO IFSP ITAPETININGA

Itapetininga, 27, 28 e 29 de maio de 2025

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Câmpus Itapetininga

Figura 1: Sistema mecânico vertical de duas massas conectadas por amortecedor e mola



FONTE: Ogata, (2010).

Considerando o diagrama de forças em cada bloco, um modelo que pode representar o sistema é apresentado a seguir:

$$\begin{aligned}
 m_1 y_1'' + b_1 (y_1' - y_2') + k_1 y_1 &= u_1 \\
 m_2 y_2'' + b_1 (y_2' - y_1') + k_2 y_2 &= u_2
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Para o estudo do sistema, são definidas as novas variáveis de estado, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_1'$, $x_3 = y_2$ e $x_4 = y_2'$. Assim, é possível obter um sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned}
 x_1' &= x_2 \\
 x_2' &= -\frac{b_1}{m_1} (x_2 - x_4) - \frac{k_1}{m_1} x_1 + \frac{u_1}{m_1} \\
 x_3' &= x_4 \\
 x_4' &= -\frac{b_1}{m_2} (x_4 - x_2) - \frac{k_2}{m_2} x_3 + \frac{u_2}{m_2}
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Na modelagem, u_1 e u_2 são funções de deslocamento vertical inicial dos blocos 1 e 2, respectivamente. As funções de deslocamento inicial são definidas: $u_1 = x_{10}$ e $u_2 = x_{30}$, quando $t = 0$, $u_1 = x_{e1}$ e $u_2 = x_{e3}$, quando $t \neq 0$, x_{10} e x_{30} são condições iniciais, x_{e1} e x_{e3} são valores dos estados no equilíbrio.

Considere os parâmetros das constantes elásticas da mola k_1 e k_2 serão tomados como uma função das variáveis de estado x_1 e x_3 , da mesma forma que foi apresentado em Elias et al. (2022). Dessa forma, defina $k_1 = k_1(1 + a^2 x_1^2)$ e $k_2 = k_2(1 + a^2 x_3^2)$. Substituindo na equação (2), é obtida uma equação não linear:

XI CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DO IFSP ITAPETININGA

Itapetininga, 27, 28 e 29 de maio de 2025

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Câmpus Itapetininga

$$\begin{aligned}
 x_1' &= x_2 \\
 x_2' &= -\frac{b_1}{m_1}(x_2 - x_4) - \frac{k_1}{m_1}(1 + a^2x_1^2)x_1 + \frac{u_1}{m_1} \\
 x_3' &= x_4 \\
 x_4' &= -\frac{b_1}{m_2}(x_4 - x_2) - \frac{k_2}{m_2}(1 + a^2x_3^2)x_3 + \frac{u_2}{m_2}
 \end{aligned} \tag{3}$$

Para calcular os pontos de equilíbrio, é necessário resolver as equações algébricas $k_1(1 + a^2x_1^2)x_1 = u_1$ e $k_2(1 + a^2x_3^2)x_3 = u_2$. Considere os valores da Tabela 1, $a = 3$, e $x_{e1} = x_{e3} = 0,05$ m, onde o ponto de equilíbrio do sistema foi levemente deslocado, podendo representar uma leve distensão na mola com o passar do tempo ou até mesmo condições de temperatura extremas do ambiente. Assim, os pontos de equilíbrio do sistema encontrados, calculados numericamente em MATLAB, foram a origem do sistema $x_e = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ e o ponto $x_e = (0,01 \ 0 \ 0,0166 \ 0)^T$.

Tabela 1: Valores dos parâmetros

Parâmetro	Valor
k_1	5 N/m
k_2	3 N/m
b_1	0,5s ⁻¹
m_1	3 kg
m_2	4 kg

Resultados

Ao investigar o sistema linearizado em torno dos pontos de equilíbrio obtidos, verificou-se que ao utilizar a origem do sistema, o estudo se resume à análise do sistema linear (2). Assim, o ponto de equilíbrio escolhido para investigar a estabilidade foi $x_e = (0,01 \ 0 \ 0,0166 \ 0)^T$. Utilizando a expansão em Série de Taylor em torno do ponto de equilíbrio escolhido, o sistema linearizado:

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \\ z_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & 0 & \frac{b_1}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{b_1}{m_1} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{b_1}{m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

onde $z = x - x_e$. Os autovalores da matriz associada ao sistema (4) obtidos são $\lambda_1 = -0,09 + 1,3i$, $\lambda_2 = -0,09 - 1,3i$, $\lambda_3 = -0,05 + 0,9i$ e $\lambda_4 = -0,05 - 0,9i$.

Como todos os autovalores têm parte real negativa, o ponto de equilíbrio do sistema é estável. A simulação do sistema (4) foi realizada com o MATLAB, com a condição inicial $x_0 = (0 \ 0,03 \ 0 \ 0,025)^T$. A Figura 2 apresenta a resposta no tempo das variáveis de

XI CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DO IFSP ITAPETININGA

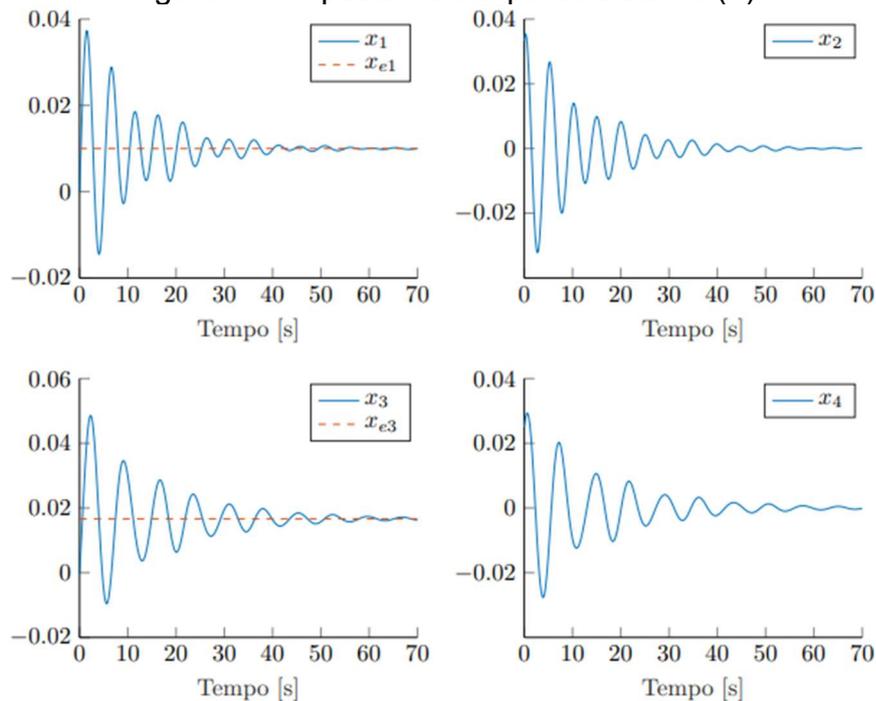
Itapetininga, 27, 28 e 29 de maio de 2025

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Câmpus Itapetininga

estado. Verifica-se que o sistema evolui para o ponto de equilíbrio com o passar do tempo, como previsto na análise dos autovalores do sistema.

Figura 1: Resposta no tempo do sistema (4)



A equivalência topológica do sistema linear aproximado em (4) comparada com o sistema não linear em (3) pode ser verificada na Figura 2. Neste caso, $\tilde{x} = z + x_e$ foi tomado como notação da variável do sistema linearizado. As trajetórias das variáveis de estado ficam equivalentes quando se aproximam do ponto de equilíbrio.

Conclusão

No presente trabalho, foi realizada a análise de estabilidade de um sistema massa-mola amortecido com não linearidade na força restauradora da mola. A análise dos autovalores do sistema linearizado indicou a estabilidade do sistema não linear. A simulação do sistema em MATLAB ilustrou a evolução do sistema no tempo, onde verificou-se que os estados evoluem para o ponto de equilíbrio investigado. Estudos complementares do projeto incluem a construção de um sistema físico massa-mola para aplicação prática da teoria investigada.

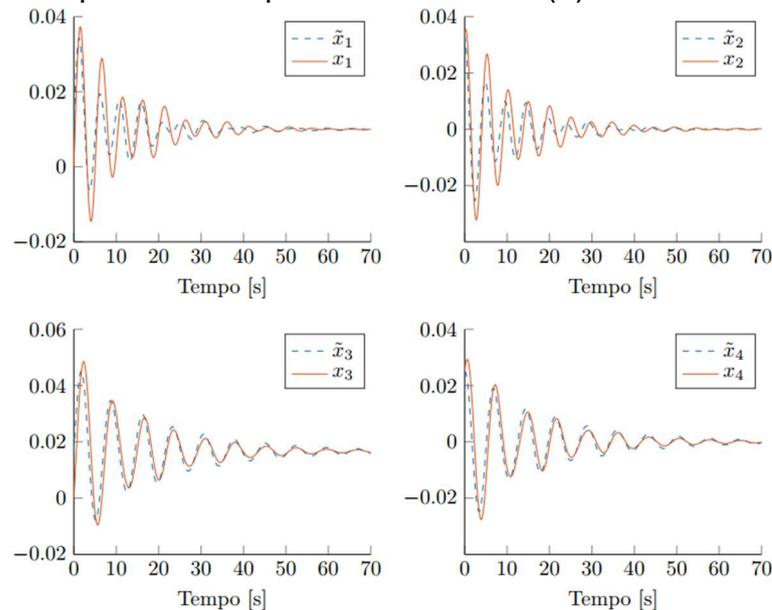
XI CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DO IFSP ITAPETININGA

Itapetininga, 27, 28 e 29 de maio de 2025

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Campus Itapetininga

Figura 2: Resposta no tempo de x do sistema (3) e de \tilde{x} do sistema (4)



Referências

- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.
- CHEN, C. T. **Linear system theory and design**. 3rd ed. New York: Oxford University Press, 1999.
- ELIAS, L. J. et al. Robust static output feedback H_∞ control for uncertain takagi-sugeno fuzzy systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, IEEE, 2022.
- GEROMEL, J. C.; PALHARES, A. G. B. **Análise linear de sistemas dinâmicos: teoria, ensaios práticos e exercícios**. 2. ed. São Paulo: Blücher, c2011.
- KELLEY, W. G.; PETERSON, A. C. **The theory of differential equations classical and qualitative**. 2. ed. New York, Springer, 2010.
- KLUEVER, Craig A. **Sistemas dinâmicos/ modelagem, simulação e controle**. Rio de Janeiro: LTC, 2018.
- MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**. 2.ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.
- OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010.
- OLIVEIRA, V. A.; AGUIAR, M. L.; VARGAS, J. B. **Engenharia de controle fundamentos e aulas de laboratório**. Rio de Janeiro, RJ: Elsevier, 2016.
- ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 10. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016